Analyse des systèmes linéaires EDP-EDO interconnectées.

Encadrants : H. LHACHEMI, G. VALMORBIDA (Pôle Automatique et Systèmes)

Résumé

L'objectif de ce projet est d'étudier les propriétés de stabilité des systèmes dynamiques décrits par des équations aux dérivées ordinaires (EDO) interconnectées à des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces interconnections sont représentatives de boucles de commande de systèmes de dimension infini où la composante EDO correspond aux dynamiques des actionneurs et d'une loi de commande de dimension finie. Le développement de tels outils d'analyse de stabilité est rendu crucial de par l'essor de méthodes de commande, telle que le *backstepping* [1], qui permettent de synthétiser de manière systématique des contrôleurs pour stabiliser des systèmes décrits par des EDP mais présentant le désavantage d'avoir une réalisation de dimension infinie. L'implémentation de ces lois de commande nécessite alors leur approximation par une dynamique de dimension finie. Or, l'introduction d'une telle approximaton de la loi de commande conduit à la perte des garanties théoriques quant à la stabilité du système bouclé. Il s'agit donc de développer des méthodes efficaces d'analyse de stabilité permettant de valider l'implémentation finale telle qu'elle sera implémentée sur le système réel.

Dans ce projet, nous nous intéresserons en particuler aux systèmes EDP décrivant des phénomènes de type réaction-diffusion. Les méthodes pour mener l'étude seront basées sur la construction de fonctionnelles de Lyapunov, concept généralisant les fonctions d'énergie. Dans un premier temps, une étude analytique permettra de définir les classes de fonctionnelles adaptées aux systèmes interconnectés étudiés. Ensuite, dans un soucis d'implémentation et d'efficacité numérique, ces fonctionnelles devront être paramétrisées. Une telle approche conduit, le plus souvent, en une approximation des fonctionnelles associées au système et donc en l'introduction d'une erreur d'approximation. Enfin, cette erreur d'approximation sera quantifiée afin d'assurer des certificats de stabilité et de pouvoir comparer les résultats obtenus avec différentes méthodes d'approximation.

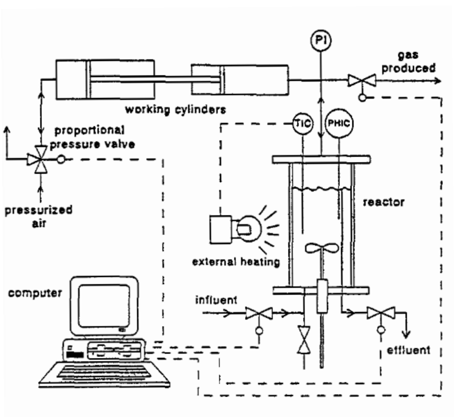
Mots-clefs : Systèmes de dimension infinie, Stabilité de Lyapunov, Approximation pseudo-spectrale.

1 Contexte

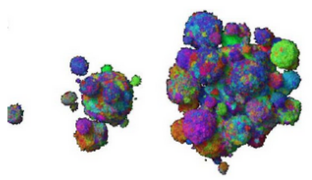
Les phénomènes de réaction-diffusion, modélisés par des **équations aux dérivées partielles (EDP)** paraboliques, interviennent naturellement dans nombre de phénomènes physiques et de leurs champs d'application. C'est par exemple le cas pour la température électronique du plasma confiné au sein d'un tokamak dans le cadre d'une fusion nucléaire contrôlée [18] ; en chimie pour le contrôle des réactions chimiques au sein des cuves des réacteurs [23] ; pour le traitement des eaux usées [11] afin de réguler la quantité de nitrates et nitrites liberée dans l'environnement ; finalement en épidémiologie pour modéliser la propagation de virus ou de tumeurs cancéreuses [20].

En ingénierie, afin de monitorer et asservir les différentes variables des ces systèmes, des appareils de mesure, des calculateurs et des actionneurs sont utilisés. Ces éléments font partie intégrante du système de commande et sont, le plus souvant, décrits par des **équations aux dérivées ordinaires (EDO)**. Cela aboutit à l'obtention d'un système couplé EDP-EDO.

De surcroît, de telles interconnections EDP-EDO émergent également lorsqu'un contrôleur et/ou un observateur est implémenté à des fins de pilotage (ou d'estimation de l'état) du système. Dans cette situation, deux grandes familles d'approches sont possibles. La première famille d'approches consiste en l'approximation de la dynamique de l'EDP par un modèle de dimension finie sur lequel on applique l'une des nombreuses méthodes de synthèse de contrôleurs qui existent dans la littérature pour la dimension finie (placement de pôles, LQR, H_∞, etc.). Le désavantage de cette méthode est qu'elle n'offre, en général, aucune guarantie quant à la stabilité du système bouclé une fois la loi de commande appliquée sur le système EDP originel de dimension infinie. Ce phénomène est connu dans la littérature sous le nom de *spillover* [4]. *A contrario*, la seconde famille d'approches consiste en la synthèse de la loi de commande directement sur le modèle EDP afin de s'affranchir du phénomène de *spillover*. La méthode la plus utilisée en la matière est celle du *backstepping* [1, 12], qui est une méthode de design systématique pour bon nombre de systèmes EDP. Le désavantage fondamental de cette approche est qu'elle résulte en des contrôleurs de dimension infinie. Leur implémentation nécessite alors une approximation de la dynamique de la loi de commande, ce qui induit la perte des guaranties de stabilité pour le système bouclé. Ainsi, dans les deux cas de figure, l'introduction d'une phase de discrétisation (soit du modèle EDP à contrôler, soit de la loi de commande) aboutit à une perte des garanties de stabilité pour le système bouclé. C'est pourquoi, le développement de méthodes d'analyse de stabilité permettant d'étudier des interconnections EDP-EDO revêt une importance cruciale.



(a) Cuves réacteurs [23].



(b) Dispersion de tumeurs [24].

FIGURE 1 – Exemples de systèmes physiques

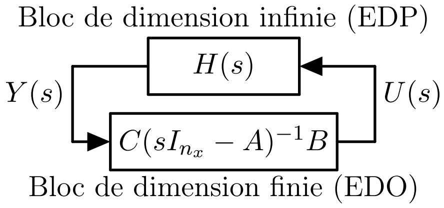


Figure 2 – Schéma bloc d'une interconnection EDP-EDO.

Une interconnection générique [15] entre un système linéaire invariant, possiblement de dimension infinie et de fonction de transfert $H(s)$, et un système de dimension finie peut-être illustrée par la Figure 2. La difficulté de l'analyse de stabilité d'un tel système provient du fait que l'entrée de l'EDP coïncide avec la sortie de l'EDO et vice versa. Dans ce projet, on se propose d'étudier plus spécifiquement les interconnections pour une EDP de type réaction-diffusion. Une réalisation typique de ce type de problème est décrite par le système $(\mathcal{S})$ tel que placé ci-dessous. Il se compose d'un système H sous la forme d'une équation de reaction-diffusion mono-dimensionelle de variable d'état z. Cette équation fait intervenir les paramètres physiques $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ qui représentent, de manière respective, les coefficients de diffusion et de réaction. Les conditions de bord de l'EDO sont associées à l'entrée u. Sans perte de généralité, on suppose la variable spatiale comme étant normalisée, c'est-à-dire $\theta \in [0,1]$ (ce qui s'obtient, pour une longueur finie quelconque $L > 0$ du domaine spatial, de manière systématique par simple changement de variable).

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t z(t,\theta) & = & (\nu\partial_{\theta\theta} + \lambda) z(t,\theta), & \forall (t,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1], \\ \left[\begin{smallmatrix} \partial_\theta z(t,0) \\ \partial_\theta z(t,1) \end{smallmatrix}\right] & = & u(t), & \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ y(t) & = & \left[\begin{smallmatrix} z(t,0) \\ z(t,1) \end{smallmatrix}\right], & \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ \dot{x}(t) & = & Ax(t) + By(t) & \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(t) & = & Cx(t), & \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{array}\right. \tag{$\mathcal{S}$}$$

Dans cette configuration, les matrices $(A,B,C) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \times \mathbb{R}^{n_x \times 2n_z} \times \mathbb{R}^{2n_z \times n_x}$ définissent la dynamique du système de dimension finie interconnecté avec le système EDP. On cherche alors à analyser la stabilité des trajectoires de $(\mathcal{S})$ en fonction des paramètres A, B, C, ν et λ. En d'autres termes, on cherche à obtenir des conditions suffisantes (et idéalement nécessaires - la nécessité des conditions étant, en général beaucoup plus difficile à obtenir) guarantissant l'existence de constantes $M, \kappa > 0$ telles que, pour toute condition initiales $z_0(\theta)$ de l'EDP et x_0 de l'EDO [1] on a :

$$\|z(t,\cdot)\| + \|x(t)\| \leq M e^{-\kappa t} \left(\|z_0\| + \|x_0\|\right), \quad \forall t \geq 0.$$

1. Avec des régularités suffisantes pour z_0, et possiblement des conditions de compatibilités entre z_0 et x_0, pour assurer l'existence des trajectoires de $(\mathcal{S})$.

Il est important de souligner à ce stade que l'étude de la stabilité des trajectoires d'un système est le point de départ fondamental vers l'analyse d'autres propriétés des systèmes. En effet, les conditions de convergence asymptotique vers le point d'équilibre d'un système permettent aussi de faire face à d'autres problèmes typiques de l'Automatique tels que la régulation et le suivi de trajectoires, la robustesse, etc.

Dans ce contexte, l'objectif général du projet est formulé comme suit :

Objectif général. Développement de méthodes efficaces permettant de statuer sur la stabilité des trajectoires et les propriétés entrée-sortie d'un système EDO interconnecté à une équation de réaction-diffusion.

Afin de répondre à cette problématique, l'idée est de s'appuyer sur les résultats d'analyse de stabilité des systèmes à retards [22] et sur les approximations pseudo-spectrales [9]. Les systèmes à retard forment une classe particulière d'interconnection EDP-EDO, telle qu'illustrée à la Fig. 2, dans laquelle l'EDP est une équation hyperbolique prenant la forme d'une simple équation de transport. Ainsi, au prisme d'une approche énergétique basée sur des fonctionnelles de Lyapunov, ce projet vise à tirer profit d'idées développées pour les systèmes à retards afin de les mettre à profit pour l'étude de systèmes tels que $(\mathcal{S})$. Pour cela, nous décomposons les objectifs du projet en deux lignes directrices principales. Elles portent sur l'obtention de classes de fonctionnelles adaptées aux systèmes tels que $(\mathcal{S})$ et sur une paramétrisation du calcul numérique, basée sur des méthodes d'optimisation des paramètres décrivant ces fonctionnelles. Ces objectifs s'articulent donc autour de deux axes principaux :

- I un axe *analytique* visant à prouver l'existence et à caractériser la forme de la fonctionnelle converse de Lyapunov ;
- II un axe *numérique* destiné à proposer des méthodes d'approximation de ces fonctionnelles.

Objectif I. Trouver l'expression analytique de la fonctionnelle de Lyapunov associée au système $(\mathcal{S})$ vérifiant les conditions de stabilité de Lyapunov.

Objectif II. Approcher la fonction de Lyapunov de l'Objectif I avec un nombre fini de paramètres et les calculer pour vérifier les conditions stabilité pour $(\mathcal{S})$.

2 Axe analytique I

D'un point de vue théorique, à l'aune des systèmes à retards [14], le but est d'exprimer analytiquement les fonctionnelles de Lyapunov converses. Ces fonctionnelles, notées $\mathcal{V}$, sont des fonctions de $\mathbb{R}^{n_z} \times L^2(0,1;\mathbb{R}^{n_z})$ dans $\mathbb{R}$ continues, différentiables et qui vérifient $\dot{\mathcal{V}}(x,z) = -|(x,z)|^2$ le long des trajectoires du système $(\mathcal{S})$. Dans le cadre des systèmes à retard, de telles fonctionnelles sont de puissants outils d'analyse de stabilité car vérifiant le théorème *converse* de stabilité [17, 25]. De manière explicite : le système à retard est stable si et seulement si la fonctionnelle $\mathcal{V}$ ainsi obtenue est définie positive [6].

Comme évoqué dans la sections précédente, ces techniques sont bien developpées pour des systèmes à retards. Dans le cas des systèmes à retards commensurables, des formes analytiques de ces fonctionnelles, dites fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, ont été obtenues [14]. Elles sont liées à un noyau exponentiel U continu, appelé matrice de Lyapunov. Afin d'étendre ce type d'approche à d'autres classes de systèmes, la méthode présentée dans [8] consiste à choisir une fonctionnelle quadratique sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x,z) = x^\top P x + 2x^\top \int_0^1 Q(\theta)z(\theta)\mathrm{d}\theta + \int_0^1 z^\top(\theta)R(\theta)z(\theta)\mathrm{d}\theta \\ + \int_0^1\int_0^1 z^\top(\theta_1)T(\theta_1,\theta_2)z(\theta_2)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\end{aligned} \tag{1}$$

où les paramètres P, Q, R, T sont obtenus à partir des solutions d'une EDP-EDO matricielle couplée.

Afin de développer une telle approche dans le cas de l'interconnection $(\mathcal{S})$, les premières questions auxquelles on doit répondre sont les suivantes. Existe t-il une solution à l'équation matricielle associée ? Quelle sont des propriétés (en particulier quant à la continuité) ? Peut-on en donner une forme analytique ?

Une fois une telle fonctionnelle converse de Lyapunov caractérisée, les conditions de stabilité de Lyapunov prennent alors la forme suivante. Existe t-il des nombres reéels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ tels que le inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\alpha_1\|(x,z)\|^2 \leq \mathcal{V}(x,z) \leq \alpha_2\|(x,z)\|^2, \quad \dot{\mathcal{V}}(x,z) \leq -\alpha_3\|(x,z)\|^2, \tag{2}$$

pour tout (x,z) dans l'espace d'états solutions du système $(\mathcal{S})$.

Il est à souligner que les conditions de positivité et de négativité formalisées par (2) ne sont pas, dans l'écrasante majorité des cas, vérifiables analytiquement. Cette problématique met en exergue le besoin de mettre en place le second axe de recherche décrit ci-dessous portant sur les aspects numériques du problème.

3 Axe numérique II

D'un point de vue numérique, l'objectif ici poursuivi est d'obtenir des fonctionnelles de Lyapunov comportant un nombre fini de paramètres par la biais de méthodes d'optimisation. Nous nous appuierons en particulier sur des méthodes d'interpolation [7] ou d'approximation pseudo-spectrales [9] pour limiter le nombre des paramètres des fonctionnelles. L'idée fondamentale ici développpé est de tester les inégalités (2) à partir de la résolution de contraintes dans des problèmes d'optimisation via des méthodes reposant sur la discrétisation et/ou l'approximation du problème. Différentes techniques seront testées afin de les comparer en terme de conservatisme et de vitesse de convergence vers la condition converse de stabilité. Une telle approche est, une nouvelle fois, motivée par les résultats existants dans le cadre des systèmes à retard pour lesquels la discrétisation uniforme [10] ou l'approximation polynomiale [3] mènent à des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité.

De manière plus concrète, des fonctionnelles candidates $\hat{\mathcal{V}}$ sont choisies sous la forme :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{V}}(x,z) = x^\top \hat{P} x + 2x^\top \int_0^1 \hat{Q}(\theta) z(\theta) \mathrm{d}\theta + \int_0^1 z^\top(\theta) \hat{R}(\theta) z(\theta) \mathrm{d}\theta \\ + \int_0^1 \int_0^1 z^\top(\theta_1) \hat{T}(\theta_1, \theta_2) z(\theta_2) \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2.\end{aligned} \tag{3}$$

où $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}, \hat{T}$ sont des fonctions visant à approximer P, Q, R, T donnés dans l'axe analytique I. Pour que les conditions de positivité de $\hat{\mathcal{V}}$ et de négativité $\dot{\hat{\mathcal{V}}}$ soient testables et implémentables, les fonctions sont approximées par des méthodes de type Galerkin sur des bases de Riesz [2] tronquées à l'ordre n. On peut par exemple considérer les polynômes de Legendre [2, 5] ou les fonctions trigonométriques [13, 16]. On bascule alors d'une algèbre d'opérateurs à une algèbre matricielle. De plus, cette approximation est effectuée en amont ou en aval [21] du calcul de la dérivée temporelle de la fonctionnelle candidate le long des trajectoires du système $(\mathcal{S})$. Dans tous les cas, des tests numériques de stabilité sont obtenus comme contraintes des problèmes d'optimisation semi-défini (SDP, *semi-definite programming*), soit directement avec des inégalités matricielles linéaires (LMI, *linear matrix inequalities*) [2, 16], soit à partir de contraintes de type somme de carrés (SOS, *sum of squares*) [19, 21]. Il est par contre à noter que ces tests sont seulement des conditions suffisantes pour la satisfaction des inégalités de Lyapunov. Ainsi, ils ne peuvent assurer la stabilité que pour des sous-ensembles des paramètres du système pour lesquels la stabilité est vérifiée.

Ces éléments nous ammènent aux questions suivantes : Y a-t-il une hiérarchie par rapport à l'ordre d'approximation ? Y a-t-il convergence pour les classes de fonctions d'approximation ? Peut-on estimer l'ordre d'approximation nécessaire ?

Le plan d'action envisagé est le suivant. On se ramène premièrement à un problème solvable numériquement. On cherche ensuite à montrer que la convergence des méthodes est atteinte. Enfin, on cherche à évaluer l'ordre d'approximation n^* des fonctionnelles de Lyapunov converse qui donne lieu à des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité.

2. Une base de Riesz généralise le concept de base de Hilbert dans le cadre des espaces de Hilbert. Plus spéfiquement, une base de Riesz est l'image d'une base de Hilbert par une transformation linéaire, continue et inversible.

4 Programme de recherche

Pour résumer de manière succinte les deux axes de recherche de ce projet de post-doctorat, nos objectifs de travail vont s'échelonner sur une année suivant le programme décrit dans la Table 1. On souligne que les objectifs principaux du projet sont associés à des publications pour chaque axe. D'autres résultats intermediaires et l'étude des applications associées aux systèmes de réaction-diffusion pourront mener à la rédaction de communications dans des conférences.

Période	Axe I	Axe II	Livrable
Trimestre 1	Expression de $\mathcal{V}$	Expression de $\hat{\mathcal{V}}$	-
Trimestre 2	Lien entre $\mathcal{V}$ et $\hat{\mathcal{V}}$	Convergence	Article journal 1
Trimestre 3	Optimiser $\mathcal{V} - \hat{\mathcal{V}}$	Estimation n^*	-
Trimestre 4	Généralisation à d'autres EDP-EDO		Article journal 2

Table 1 – Calendrier 2022/2023

Suivant les résultats obtenus, des perspectives de généralisation de la méthode ainsi développée pourront être envisagées. On peut par exemple envisager la possibilité de traiter d'autres relations entrées-sorties de l'EDP (localisés ou non), d'autres types d'EDP paraboliques et éventuellement des classes plus générales de systèmes (un bon candidat serait, par exemple, la classe abstraite des systèmes de type Callier-Desoer).

4.1 Risques et alternatives

Le programme de travail étant ambitieux, nous avons identifié les potentiels risques associés aux deux axes de recherche principaux. Dans les cas de figure où les scénarios détaillés dans les risques seraient rencontrés, des alternatives pour y remédier sont proposées.

Risque Objectif I : Non existence de formes analytiques pour les fonctions P, Q, R, T.
Alternative : Trouver des approximations des solutions des équations EDP-EDO matricielles couplées directement par des méthodes numériques.

Risque Objectif II : Non continuité des fonctions P, Q, R, T, ce qui résulterait en l'absence de convergence des méthodes d'approximation usuelles.
Alternative : Mise en place de nouvelles techniques d'approximations en s'appuyant sur des fonctions discontinues.

Références

[1] J. Auriol, K.A. Morris et F. Di Meglio. “Late-lumping backstepping control of partial differential equations”. In : *Automatica* 100 (2019), p. 247-259.

[2] M. Bajodek, A. Seuret et F. Gouaisbaut. *Stability analysis of an ordinary differential equation interconnected with the reaction-diffusion equation*. hal-03150194. Provisionally accepted for publication in Automatica. 2021.

[3] M. Bajodek, A. Seuret et F. Gouaisbaut. *On the necessity of sufficient LMIs conditions for time-delay systems arising from Legendre approximation*. hal-03435008v2. Provisionally accepted for publication in Automatica. 2022.

[4] M.J. Balas. "Finite-dimensional control of distributed parameter systems by Galerkin approximation of infinite dimensional controllers". In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 114 (1986), p. 17-36.

[5] L. Baudouin, A. Seuret et F. Gouaisbaut. "Stability analysis of a system coupled to a heat equation". In : *Automatica* 99 (2019), p. 195-202.

[6] R. Datko. "Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space". In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 32.3 (1970), p. 610-616.

[7] T.A. Driscoll, N. Hale et L.N. Trefethen. *Chebfun guide*. Oxford : Pafnuty Publications, 2014.

[8] J. Duda. "Lyapunov functional for a linear system with two delays". In : *Control and Cybernetics* 39 (3 2010), p. 797-809.

[9] D. Gottlieb et S.A. Orszag. *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*. SIAM, 1977, p. 170.

[10] K. Gu. *Complete Quadratic Lyapunov-Krasovskii Functional : Limitations, Computational Efficiency, and Convergence*. In Advances in Analysis and Control of Time-Delayed Dynamical Systems. World Scientific, 2013, p. 1-19.

[11] J.E. Haag et al. "Experimental Modeling of a Biofilter for Combined Adsorption and Nitrification". In : *IFAC Proceedings Volumes* 37.3 (2004), p. 159-164.

[12] I. Karafyllis, M. Krstic et Z. Campus. "Global Stabilization of a Class of Nonlinear Reaction-Diffusion PDEs by Boundary Feedback". In : (2019).

[13] R. Katz et E. Fridman. "Delayed finite-dimensional observer-based control of 1-D parabolic PDEs". In : *Automatica* 123 (2021).

[14] V.L. Kharitonov. *Time-Delay Systems : Lyapunov Functionals and Matrices*. Control engineering. Birkhäuser, 2013, p. 311.

[15] M. Krstic. *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Springer, 2009, p. 466.

[16] H. Lhachemi et C. Prieur. "Stability assessment of reaction-diffusion PDEs coupled at the boundaries with an ODE". In : *arXiv* (2021). eprint : 0902.0885.

[17] J.L. Massera. "On Liapounoff's conditions of stability". In : *Annals of Mathematics* 50 (1949), p. 705-721.

[18] B. Mavkov. "Control of coupled transport in Tokamak plasmas". Thèse de doct. Univ. Grenoble, 2017.

[19] S. Shivakumar et al. “A Generalized LMI Formulation for Input-Output Analysis of Linear Systems of ODEs Coupled with PDEs”. In : *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2019, p. 280-285.

[20] C. Stinner, C. Surulescu et M. Winkler. “Global weak solutions in a PDE-ODE system modeling multiscale cancer cell invasion”. In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 46.3 (2014).

[21] G. Valmorbida, M. Ahmadi et A. Papachristodoulou. “Stability Analysis for a Class of Partial Differential Equations via Semidefinite Programming”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 61.6 (2016), p. 1649-1654.

[22] G. Valmorbida et al. *Delays and Interconnections : Methodology, Algorithms and Applications*. T. 10. Advances in Delays and Dynamics. Springer, 2019.

[23] L.H.J. Van den Heuvel J.C.and Vredenbregt, I. Portegies-Zwart et S.P.P. Ottengraf. “Acceleration of mass transfer in methane-producing loop reactors”. In : *Antonie van Leeuwenhoek* 67.1 (1995), p. 125-130.

[24] B. Waclaw et al. “A spatial model predicts that dispersal and cell turnover limit intratumour heterogeneity”. In : *Nature* 525 (2015), p. 261-264.

[25] T. Yoshizawa. “Stability Theory by Liapunov’s Second Method”. In : *Mathematical Society of Japan* (1966).